Y 995056

四川大学
硕士学位论文

题　目 $\hat{Ito}$ 型随机微分方程的指数稳定性及其应用

作　者 刘宗树　完成日期 2006 年 3 月 16 日

培 养 单 位　数学学院

指 导 教 师　徐道义教授

专　　　业　应用数学

研 究 方 向　泛函微分方程

授予学位日期　　年　　月　　日

摘　　要

$It\hat{o}$ 型随机微分方程的指数稳定性及其应用

应用数学专业

研究生 刘宗树　　　　指导教师 徐道义教授

随着科学技术的飞速发展，随机因素对系统的影响日益受到人们的重视。而作为概率论与常微分方程相结合发展而成的随机微分方程这一边缘学科，自伊藤于 1961 年首次发表“论随机微分方程”一文来，得到了广大理论科学工作者和实际应用科技人员的重视。随机微分方程的稳定性理论，在确定性微分方程稳定性理论与随机过程理论的基础上发展特别迅猛，而且应用也越来越广泛。它主要应用于系统科学，工程控制，生态学等各方面。在这些新兴的科学技术中，大量出现了随机微分方程的问题。例如在随机干扰下的控制问题，通讯技术中的滤波问题，声纳探测潜艇的问题，生物数学模型的建立问题，都依赖于随机微分方程的研究和解决。

稳定性的重要意义可想而知，小至一个具体的控制系统，大至一个社会系统，金融系统，生态系统，总是在各种偶然的或持续的干扰下进行的。承受这种干扰之后，能否保持运行或工作状态，而不至于失控或摇摆不定，至关重要。所以随机微分方程的稳定性问题有重要的理论意义和广泛的应用背景。

本文主要分成三章。第一章引言，主要对本文的主要内容及知识结构做一个简单的介绍。第二章主要介绍随机微分方程的发展及随机微分方程稳定性的一些基本概念，利用局部鞅收敛定理和 $It\hat{o}$ 公式研究具有可变时滞随机微分方程的指数稳定性，得到了与时滞无关的几乎必然指数稳定性的充分判据。第三章介绍随机神经网络稳定性分析的研究现状，并运用我们的主要结果给出具有变时滞的随机神经网络指数稳定的充分条件。

关键词： 随机时滞微分方程，$It\hat{o}$ 积分，几乎必然指数稳定，鞅收敛定理，随机时滞神经网络，M 矩阵

Abstract

Exponential stability of $\widehat{Ito}$ stochastic differential equation and applications

Major : applied mathematics

Author: Zongshu Liu **supervisor:** Daoyi Xu

With the development of the science and technology, people have attached very great importance to effects of stochastic factor on the system day by day. Stochastic differential equation (SDE) is a marginal subject, which is a combination of probability theory and ordinary differential equation. Since $\hat{Ito}$ published "Theory of Stochastic Differential Equations" (1961), more and more scientific theory workers and applied technical workers have paid much attention to it. The theory of SDE which is based on the certain differential equation and stochastic process, is growing especially fast and its application is also more and more extensive. It is mainly be applied to system science, engineering control, ecology, etc. In these newly arisen science techniques, large number of question about SDE are appeared, such as control problem under the stochastic interference, the filter wave within the communication technique problem, the question about the sonar probes into submarine, the establishment problem of living creature –mathematics model. They depend on research and resolve of SDE.

The important meaning of stability is imaginable. From a small specific control system to a big social system, financial system, ecology system, etc. It is appeared under the various accidental or continuous disturb. After bearing this interference, system is uncertain to keep to circulate or work appearance and is unlikely to lose control or sway, so the stability of SDE have important theories meaning with extensive applied background.

This text is divided into three chapters. Chapter 1 is a preface that gives a simple introduction to the main contents and the knowledge structure. Chapter 2 discuss some basic concepts of the SDE and the stability of SDE, by using martingale convergence theorem and Ito formula. We obtained sufficient criteria for almost surely exponential stability which is independent of delays. Chapter 3 chiefly research the stability of stochastic neural network, and give some sufficient conditions for the exponential stability of stochastic neural network with variable delay by using our main result.

Keyword: Stochastic delay differential equation, $\hat{Ito}$ integration, Almost surely exponential stability, Martingale convergence theorem, Stochastic delay neural network, M-matrix.

第一章 引言

随着科学的发展，社会的进步，越来越多的科技成果运用到现实生活，比如电器设备，通讯设备，交通工具等等。而对于航空航天，战略装备，环境保护也是世界各国致力于发展的对象。但对于这些系统来说，研究他们运行的稳定性是一项必不可少的方面。一个系统若想在工程中发挥作用就必须具备稳定性。稳定性理论是研究动态系统中的过程（包括平衡位置）相对于干扰是否具有自我保持能力的理论，它的概念最早源于力学，它刻画了一个刚体运动的平衡状态，它的发展为工程技术，特别是自动化，控制理论等提供了广泛的应用。随着科学技术发展的日新月异，对系统有较高的要求或随机因素不可忽略时，利用随机系统来处理问题，就成为自然而必要的手段。例如：比较简单的电路系统可以忽略噪声的影响，但对于大规模的集成电路来说，避免随机噪声的影响是不可取的，它会增大误差，影响系统的稳定性能。而对于具体的每一个系统来说， 它容易受到各种客观因素的影响，有些影响可以忽略不计，但有些随机因素对系统的稳定性影响却是致命的。所以在随机因素的干扰下，考虑系统的稳定性是动态系统研究中的一项必须具备的方面。随机系统建立在生物学、医学、电子学、物理、化学、计算机科学、控制科学、材料科学等基础上。其成功应用的例证涵盖了智能控制系统、信号处理、模式识别、智能计算等方面。

随机微分方程正是在确定性微分方程稳定性理论和随机过程理论的基础上发展起来。从数学上看，随机微分方程是介于微分方程和概率论之间的边缘分支，它是两个数学分支互相渗透的结果，因此随机微分方程的研究领域是及其广阔的。在这些领域中，随机微分方程稳定性理论的研究，正如同确定性常微分方程稳定性理论的研究一样，是研究它的解的定性理论的一个重要方面，无论是对于基础理论的研究，还是应用技术的研究，都具有十分重要的意义。

神经网络系统是由大量的、同时也是简单的处理单元广泛地相互连接而形成的复杂网络系统。神经网络既是高度非线性动力系统，又是自适应系统，可用来描述认识，决策及控制等智能行为。其对众多学科的包容性，理论分析方法的多样性，在工程技术中应用的广泛性是其它学科无法比拟的，它涉及到生物学、医学、电子学、数学、物理、化学、计算机科学、控制学、材料科学等。近些年来，许多科学家提出了许多种具备不同信息处理能力的神经网络，并被

广泛地成功的运用于模式识别、语音识别、图象处理、信号处理、系统控制、最优化决策以及求解非线性代数问题等方面。神经网络理论的应用研究已经渗透到各个领域。20 世纪 80 年代以来，在控制领域，将神经系统和传统控制技术相结合取得了许多令人鼓舞的结果。这些成就加强了人们对神经网络系统的进一步认识，引起了世界许多国家的科学家、研究机构及企业界人士的关注，也促成了不同学科的科学工作者联合起来，从事神经网络理论、技术开发及应用于现实的研究。同时，神经网络是一种复杂的力学系统，这种特性决定了它被实际应用的前提是神经网络系统具有一些较好的基本特性，如稳定性、收敛性、周期运动及稳定性等。一种神经网络系统若想在工程中发挥作用就必须具备稳定性，因此在神经网络的设计和分析中，稳定性的分析是极为重要的且必不可少的一个环节。 由于神经网络系统本身所具有的复杂性，所以它易于受到其它外界随机因素的影响。对某些随机因素来说，系统的稳定性受到影响可能不大，但对系统有较高要求或随机因素的影响不可忽略时，利用随机系统来处理问题显得尤为重要。所以研究随机神经网络系统的各种稳定性就成为目前需要解决的问题。

本文在第二章里面，主要介绍了随机微分方程的发展历程以及研究随机微分方程稳定性现状。利用局部鞅收敛定理和 *Itô* 公式，研究具有可变时滞的随机微分方程的指数稳定性，得到了关于该系统与时滞无关的几乎必然指数稳定性的充分判据，推广了现有文献中的某些结果。本文在第三章中，简要介绍随机神经网络稳定性发展，列举了随机神经网络稳定性研究的最新成果，运用了本文的主要结果给出了对具有变时滞的随机神经网络的指数稳定性的充分条件。

第 二 章　随机微分方程的指数稳定性

2.1　随机微分方程稳定性的研究背景

在自然界中，事物的变化过程大体分成两类：确定性过程和随机过程。所谓的确定性过程就是指事物的变化过程符合必然的变化规律，具有确定的表达式，也就是说确定性过程是可以用关于时间 t 的确定的函数来加以描述的变化过程。随机过程则是指在变化过程中没有确定的变化形式的过程，这类事物的变化不能用关于时间 t 的确定性函数加以直接描述。然而在研究实际物理现象的数学模型时，从一个物理问题转到一组数学方程绝不会是完全精确的。由于它的不确定性、复杂性、不可避免的给数学模型带来一些不确定性因素。而在诸如经济金融、保险、人口增长理论、信号处理等领域，不确定性因素往往是问题的关键所在，不可忽视。在二十世纪，随着这一类实际问题的大量出现，促进了随机分析的构建和发展。

布朗运动(Brown motion)最初是由英国生物学家布朗于 1827 年根据观察花粉微粒在液面上作“无规则运动”的物理现象而提出的。1905 年爱因斯坦（Einstein ）首次对这一现象的物理规律给出了一种数学描述，使这一课题有了显著的发展。这方面的物理工作理论在 Smoluchowski, Fokker, Planck, Burger, Furth Orstenin, Ublenbek 等人的努力下迅速发展起来了。但数学方面却由于精确描述太困难而进展缓慢，直到 1918 年才由维纳（Wiener ）对这一现象在理论上做出精确的数学描述，并进一步研究布朗运动轨道的性质，提出了在布朗运动空间上的测度和积分。这些工作使得对布朗运动及其研究得到迅速而深入的发展。1923 年，维纳本人就布朗运动给出了一系列严格的研究成果，所以布朗运动也称为 Wiener 过程。

随机微分方程的研究是随着随机过程理论与常微分方程理论的发展而迅速发展起来的。然而，早在随机过程严格的数学理论建立之前二十年，就已经提出了微分系统的随机积分问题。1902 年，Gibbs 在讨论统计力学问题时，研究了保守力学系统的 Hamilton - Jacobi 微分方程组，它的积分初始状态是随机的，这就是最早的随机微分方程问题[1]。 1908 年，Langevin[2] 在研究布朗运动时得到了下述随机微分方程

$$m\frac{dx(t)}{dt}=-\beta x(t)+y(t) \qquad (2.1.1)$$

其中，x（t）表示液体微粒在某一方向的运动速度。$-\beta x(t)$表示介质中分子运动对微粒碰撞构成的随机作用，这种形式的方程叫 Langevin 方程。

1934 年至 1938 年 S.Berntein 引进了随机微分方程[3-4]，并证明该方程所确定的随机变量的极限分布是 Kolmogorov 方程的基本解。在 S.Berntein 的框架下，I.I.Gihman[5-7]独立建立了随机微分方程的理论。1942 年 $It\hat{o}$[8]利用随机微分方程研究了关于 Markov 过程的 Kolmogorov 方程。直到 1951 年，$It\hat{o}$[9]才独立建立了下述 $It\hat{o}$ 型随机微分方程的理论

$$dx(t)=b(x,t)dt+\sigma(x,t)dW(t) \quad x(t_0)=x_0 \qquad (2.1.2)$$

其中 W(t)是 Wiener 过程，dx(t)为 $It\hat{o}$ 意义下的随机微分，随后随机微分方程得到了很快的发展。

在常微分方程稳定性理论的研究中，Lyapunov 直接法是确定一般的非线性系统稳定性的较为一般的方法。1959 年 L.E.Bertain[10]等人首先提出了用 Lyapunov 稳定性的概念和方法来研究随机微分方程解的稳定性，随后主要由于美国的 Bucy，Kushner，Kozin 等人的努力，随机 Lyapunov 稳定性理论得到了迅速的发展。Arnold(1972)，Firedman(1976)，Hasminskill(1981)，Mao(1991)[11-15]对随机模型进行了稳定性分析。1971 年，R.F.Curtain[16]将随机微分方程理论推广到了 Hilbert 空间，由于 F.Kozin[17]，U.G.Haussman[18]，A.Ichikawa [19]等人的工作，Hilbert 空间中随机微分方程稳定性理论得到了很快的发展。

2.2 随机微分方程稳定性研究的发展及现状

1908 年，Langevin 在研究 Brown 运动时得到了如下的随机微分方程

$$m\frac{dx(t)}{dt}=-\beta x(t)+y(t)$$

其中 y(t)为随机作用力。

1951年，Itô建立了下述Itô型随机微分方程的理论

$$dx(t) = f(t,x)dt + \sigma(t,x)dW(t) \qquad (2.2.1)$$

其中W(t)是具有m维分量的Winer过程，

$$f: R^{+} \times R^{n} \to R^{n}, \qquad \sigma: R^{+} \times R^{n} \to R^{n \times m}$$

1965年，Skorokhod证明了当$\alpha > \frac{1}{2}$时，Itô型随机微分方程

$$dx(t) = g(x(t))dW(t) \qquad t \geq 0 \qquad (2.2.2)$$

在初始条件$x(t_0) = x_0\ (x_0 \in R)$下，解是唯一存在的，其中W（t）是一维标准维纳过程，g是一维有界的实值函数，且满足：

$$|g(x) - g(y)| \leq k(x-y)^{\alpha}, \qquad \forall x, y \in R, \alpha > \frac{1}{2}$$

其中k是大于零的常数。1971年Yamada和Watanabe发展了这一结果，证明了当$\alpha \geq \frac{1}{2}$时方程（2.2.2）存在唯一解。

1967年， Hasminskill给出了线性随机系统

$$dx(t) = \lambda x(t)dt + \mu x(t)dW(t) \qquad x(t_0) = x_0 \qquad (2.2.3)$$

$\lambda, u \in C$在大范围内随机渐近稳定的充要条件$\mathrm{Re}(\lambda - \frac{1}{2}\mu^2) < 0$。同时Arnold进一步建立了保证（2.2.3）零解均方渐近稳定的条件$\mathrm{Re}\lambda < -\frac{1}{2}|\mu|^2$。

1967年，Syski将随机微分方程分成三大类：

1） 具有随机初始条件的随机微分方程

这是最简单的情况，即方程本身不受随机因素的影响，而随机性仅仅出现在初始条件的情形。

2）具有随机作用项的随机微分方程

例如： $$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t),t) + y(t) \qquad x(t_0) = x_0 \qquad (2.2.4)$$

其中 y(t)是方程的随机作用项，它是某个随机过程

3)具有随机系数的随机微分方程

例如：$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t),t,y(t))$ ， $x(t_0) = x_0$ （2.2.5）

其中 y(t) 是随机过程。

日本的伊藤于 1951 年首先提出的 Itô 型随机微分方程是（2）类方程的特例，而 Itô 型方程是目前随机微分方程研究中的主要方向。因为它的解过程是 Markov 过程，因此它对随机过程理论和控制理论都有着十分重要的意义。

1973 年，Friedman 也讨论了随机常微分方程零解的渐近稳定性。

Hasminskill 在 1980 年系统地给出了随机微分方程（2.2.1）平衡点的几种稳定性定义，即：随机稳定，随机渐近稳定和大范围随机渐近稳定。

1988 年，Gard 在文献[20]中给出了一系列应用 Lyapunov 函数方法判定（2.2.1）零解随机稳定和随机渐近稳定的条件，并运用这些条件讨论了自治方程的随机稳定性。

1984 年，Arnold, Oeljeklaus 和 Pardoux 考虑了方程（2.2.3）的指数稳定性，在文中给出了方程零解几乎处处指数稳定的条件，并讨论了稳定条件中的 Lyapunov 指数与 p 阶矩指数稳定中 Lyapunov 指数之间的关系。

1984 年，Mohanmmed[21]考虑系统

$$\begin{cases} dx(t) = f(t,x(t),x(t-\tau))dt + g(t,x(t),x(t-\tau))dW(t) & t>0 \\ x(t) = \psi(t) & t\in[-\tau,0] \end{cases} \quad (2.2.6)$$

其中 τ 是大于 0 的时滞项， $f: R^+ \times R^n \times R^n \to R^n, g: R^+ \times R^n \times R^n \to R^{n\times m}$ W(t) 是 m 维分量相互独立的维纳过程，初值函数 $\psi(t)\in C([-\tau,0];R^n)$ ）他应用 Lyapunov 函数判别方程（2.2.6）零解 p 阶矩渐近稳定的方法。

1986 年 Kolmanovskill 和 Nosov 在假设系统（2.2.6）中对函数 f 和 g 满足 Lipschitz 条件和线性增长的条件下，证明了如果对于 $p \ge 2$，存在正数 c_1、c_2 和 c_3，并存在连续函数 V： $R^+ \times C([-\tau,0];R^n) \to R$, 使得

$$c_1|\xi(0)|^p \le c_2\|\xi\|^p, \ (t,\xi)\in R^+ \times C([-\tau,0];R^n) \quad 和 \quad (2.2.7)$$

$$E(V(t_2,x_{t_2}(\psi))) - E(V(t_1,x_{t_1}(\psi))) \le -c_3\int_{t_1}^{t_2} E|x(s;\psi)|^p ds \qquad t_2 > t_1 \ge 0$$

成立，则系统（2.2.6）的零解是 p 阶渐近随机稳定的。

1990 年，Mohanmmed[22]给出了线性时滞微分方程几乎处处指数稳定的条件，这是随机时滞微分方程关于指数稳定的最早成果。1991 年，X. Mao 又讨论了一类非线性随机时滞微分方程的几乎处处指数稳定性。

1994 年 X. Mao[23]，全面讨论了随机微分方程和随机泛函微分方程的指数稳定性。近期关于随机微分方程的指数稳定性有如下几个方面的工作：

X. Mao [24] 将泛函微分方程的 Razumikhin 技术应用到如下中立型随机泛函微分方程：

$$d[x(t)-G(x_t)] = f(t,x_t)dt + g(t,x_t)dW(t) \qquad (2.2.8)$$

得到了解的指数稳定性。

X. Mao 将 Razumikhin 技术应用到如下滞后型随机微分方程

$$dx(t) = f(t,x_t)dt + g(t,x_t)dW(t) \qquad (2.2.9)$$

得到了解的指数稳定性。

T. Taniguchi[25]等利用半群理论研究了如下 Hilbert 空间滞后型随机泛函微方程的解的存在唯一性和指数稳定性。

$$dx(t) = [-Ax(t) + f(t,x_t)]dt + g(t,x_t)dW(t) \qquad (2.2.10)$$

T. Caraballo[26]等讨论了如下随机偏函微分方程

$$x(t) = \psi(0) + \int_0^t [A(s,x(s)) + f(s,x_s)]ds + \int_0^t g(s,x_s)dW(s) \qquad (2.2.11)$$

得到了解存在唯一性和指数稳定性。

X.Mao[27-28] 等人将 Lasalle 不变原理推广到了下述随机微分方程和随机泛函微分方程

$$dx(t) = f(t,x(t))dt + g(t,x(t))dW(t) \qquad (2.2.12)$$

$$dx(t) = f(t,x(t),x_t)dt + g(t,x(t),x_t)dW(t) \qquad (2.2.13)$$

X .Mao[29]等讨论了如下不确定性随机泛函微分方程

$$dx(t) = [(A+\Delta A)x(t) + (B+\Delta B)x(t-\tau)]dt + [\Delta Cx(t) + \Delta Dx(t)]dW(t) \qquad (2.2.14)$$

得到了系统 Robust 稳定的条件。

V. Dragan [30]等得到了下述具有奇异扰动的 $It\hat{o}$ 随机微分方程的指数稳

定性。

$$dx_1(t)=[A_{11}x_1(t)+A_{12}x_2(t)]dt+\sum_{k=1}^{N}A_{11}^{k}x_1(t)dw_k(t) \qquad (2.2.15)$$

$$\varepsilon dx_2(t)=[A_{21}x_1(t)+A_{22}x_2(t)]dt+\sum_{k=1}^{N}A_{21}^{k}x_1(t)dw_k(t) \qquad (2.2.16)$$

罗交晚，邹捷中，候振挺[31]研究了下述 Markov 调治的随机时滞微分方程

$$dx(t)=f(x(t),x(t-\tau_1(t),t,r(t)))dt+g(x(t),x(t-\tau_2(t),t,r(t)))dW(t)$$

(2.2.17)

给出了上述方程的比较原理，得到了平凡解的矩指数稳定性。

2.3 关于稳定性的预备知识

设$\Omega\subset R^n$,Ω是包含原点的n 维开邻域，$I\overset{def}{=}[0,+\infty)$， $W(x)\in C[\Omega,R]$, $V(t,x)\in C[I\times\Omega,R]$分别表示定义域为$\Omega$，I×R，值域为R的连续函数。

定义 2.3.1： $W(x)$在Ω上正定，若在Ω上$W(x)\ge 0$，且W(x)=0, 当且仅当x=0;

称函数$W(x)$在Ω上负定，若$-W(x)$在Ω上正定。

正定函数，负定函数通称定号函数，也叫 Lyapunov 函数。

如：$W(x_1,x_2)=2x_1^2+x_2^2+2x_1x_2$为正定函数。

定义 2.3.2： 称函数 V（t, x）$\in C[I\times\Omega, R]$正定，若存在正定函数$W(x)\in C[\Omega, R]$，使$V(t,x)\ge W(x)$且$V(t,0)\equiv 0$. 若-V(t, x)正定，则称 V(t, x）为负定函数. 如:$V(t,x_1,x_2)=(a+e^{-t})(x_1^2+x_2^2)$在$a>0$时也称为正定函数。

定义 2.3.3 [32]： 函数 $\varphi\in C[[0,r],R]$是严格单调上升函数，且$\varphi(0)=0$，则称φ是属于K类函数，也称楔函数，记为$\varphi\in K$。

定理 2.3.1[33]：对于 在$\|x\|\le H$上给定的任意正定函数$W(x)$，必存在两个函数φ_1，$\varphi_2\in K$,使得$\varphi_1(\|x\|)\le W(x)\le\varphi_2(\|x\|)$。

定义 2.3.4：$f(t)\in C[I,R]$ $I=[t_0, +\infty)$，$\forall t\in I$，下面四个导数

$$
\begin{aligned}
D^{+}f(t) &\overset{def}{=} \overline{\lim_{h\to 0^{+}}}\frac{1}{h}(f(t+h)-f(t)) \\
D_{+}f(t) &\overset{def}{=} \underline{\lim_{h\to 0^{+}}}\frac{1}{h}(f(t+h)-f(t)) \\
D^{-}f(t) &\overset{def}{=} \overline{\lim_{h\to 0^{-}}}\frac{1}{h}(f(t+h)-f(t)) \\
D_{-}f(t) &\overset{def}{=} \underline{\lim_{h\to 0^{-}}}\frac{1}{h}(f(t+h)-f(t))
\end{aligned}
\qquad (2.3.1)
$$

分别称为 $f(t)$ 在 t 处的右上导数、右下导数，左上导数，左下导数，它们统称 Dini 导数。

给定一个微分系统：

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x)\text{，其中 } f(t,x)\in C[I\times R^{n},R^{n}] \qquad (2.3.2)$$

定理 2.3.2 [33]： 设函数 $V(t,x)\in C[I\times\Omega,R^{1}],\Omega\subset R^{n}$ 且 $V(t,x)$ 关于 x 对 t 一致

地满足局部李普希兹条件，即 $|V(t,x)-V(t,y)|\le L\|x-y\|$

则 $V(t,x)$ 沿方程（2.3.2）的解 $x(t)$ 的右上导数，右下导数分别为

$$
\begin{aligned}
D^{+}V(t,x(t)) &= \overline{\lim_{h\to 0^{+}}}\frac{1}{h}\{V(t+h,x+hf(t,x))-V(t,x)\}; \\
D_{+}V(t,x(t)) &= \underline{\lim_{h\to 0+}}\frac{1}{h}\{V(t+h,x+hf(t,x))-V(t,x)\}
\end{aligned}
\qquad (2.3.3)
$$

定义 2.3.5 [34]： 称实矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为 M 矩阵，若下列条件满足：

1） $a_{ii}>0(i=1,2,...,n)$ ， $a_{ij}\le 0(i\ne j,i,j=1,2,...,n)$

2）下列 n 个行列式大于零

$$\det\begin{vmatrix} a_{11},\dots,a_{1i} \\ \vdots \qquad \vdots \\ a_{i1},\dots,a_{ii}\end{vmatrix}>0 \qquad i=1,2,\dots,n$$

M 矩阵的等价条件：

1） $a_{ii}>0,(i=1,2,...,n)$, $a_{ij}\le 0,(i\ne j,i,j=1,2,...,n)$，

且存在常数$d_j>0$，使得$\sum_{j=1}^{n}d_j a_{ij}>0$

2) $a_{ii}>0\ (i=1,2,...,n), a_{ij}\le 0\ (i\ne j,i,j=1,2,...,n)$,

且$A^{-1}\ge 0$，即A^{-1}为一个非负矩阵

3) $a_{ii}>0\ (i=1,2,...,n), a_{ij}\le 0\ (i\ne j,i,j=1,2,...,n)$,

$\forall$ 正数组$\xi=\mathrm{Col}(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)$，代数方程组$Ax=\xi$，有正数组解$\eta=\mathrm{Col}(\eta_1,\eta_2,...,\eta_n)$

4) $a_{ii}>0\ (i=1,2,...,n), a_{ij}\le 0\ (i\ne j,i,j=1,2,...,n), -A$是一个$Hurwitz$稳定矩阵，

即A仅有负实部特征值。

5)$a_{ii}>0\ (i=1,2,...,n), a_{ij}\le 0\ (i\ne j,i,j=1,2,....,n), G\overset{def}{=}(I-D^{-1}A)$的谱半径

ρ(G) <1,(即G的特征值都在复平面的单位圆内），

这里$D=\mathrm{diag}(a_{11},a_{22},...,a_{nn})$

考虑常微分方程

$$\frac{dx(t)}{dt}=f(t,x(t)) \tag{2.3.4}$$

其中 $x\in R^n$，$f(t,x)\in C[I\times R^n,R^n]$，且 $f(t,0)=0$，

$$D_r=\{x\mid \|x\|<r,x\in R^n,0<r<+\infty\}$$

微分方程的各种稳定性定义[35-36]

定义 2.3.6: 若$\forall\varepsilon>0,\forall t_0\in I,\exists\delta(\varepsilon,t_0)>0,\forall x_0$，当$\|x_0\|<\delta(\varepsilon,t_0)$时，对一切$t\ge t_0$，有$\|x(t,t_0,x_0)\|<\varepsilon$则称（2.3.4）的平凡解是稳定的。

定义 2.3.7: 若对$\forall\varepsilon>0,\exists\delta(\varepsilon)>0$,对$\forall x_0$，当$\|x_0\|<\delta$时，对一切$t\ge t_0\ge\tau$，有$\|x(t,t_0,x_0)\|<\varepsilon$则称（2.3.4）的平凡解一致稳定。

定义 2.3.8： 称方程（2.3.4）的平凡解是指数型渐近稳定的（简称指数稳定）若对$\forall\varepsilon>0,\exists\lambda>0,\exists\delta(\varepsilon),\forall t_0\in I$，当$\|x_o\|<\delta$时，有：

$$\|x(t,t_0,x_0)\|\le\varepsilon e^{-\lambda(t-t_0)},(t\ge t_0)$$

定义 2.3.9: 称方程（2.3.4）的平凡解是全局指数型渐近稳定的（全局指数稳定）。对$\forall\varepsilon>0,\exists\lambda>0,\exists k(\delta)>0$，当$\|x_0\|<\delta$时，有

$$\|x(t,t_0,x_0)\|\le k(\delta)e^{-\lambda(t-t_0)}$$

定义 2.3.10: $\forall t_0,\forall r>0,\forall x_0\in D_r,\forall\varepsilon>0,\exists T=T(t_0,x_0,r,\varepsilon)>0$,对$\forall t\ \ge t_0+T$，有$\|x(t,t_0,r_0)\|<\varepsilon$成立，则称（2.3.4）式的零解是全局吸引的。

定义 2.3.11: $\forall r>0,\forall\varepsilon>0,\exists T=T(r,\varepsilon)>0$,对$\forall t\ \ge t_0+T$,有$\|x(t,t_0,r_0)\|<\varepsilon$成立，则称（2.3.4）式的零解是全局一致吸引的。

定义 2.3.12: $\forall t_0,\forall r>0,\forall\varepsilon>0,\exists T=T(t_0,r,\varepsilon)>0$,对$\forall x_0\in D_r$,对$t\ge t_0+T$,有$\|x(t,t_0,r_0)\|<\varepsilon$成立，则称（2.3.4）式的零解是全局等度吸引的。

定义 2.3.13: 设$(\Omega,\mathbb{F},P)$为一个概率空间，T 为一个实数集，如果对每一个$t\in T$都有定义在$(\Omega,\mathbb{F},P)$上的随机变量$X(t,\omega),\omega\in\Omega$与之对应，则称依赖于$t$的随机变量族$\{X(t,w),t\in T\}$为一个随机过程。如果参数集为连续时，称随机过程为连续参数随机过程。如果参数集为离散时，则称随机过程为离散参数随机序列。

为书写方便，$\{X(t,\omega),t\in T\}$常简记为$\{X(t),t\in T\},\{X_t\}$或$\{X(t)\}$。

定义 2.3.14 : 设$\{X(t),t\in T\}$是一个随机过程，如果对 T 中任意n个时刻$t_1<t_2<,\dots,<t_n$，增量$X(t_2)-X(t_1),X(t_3)-X(t_2),\dots,X(t_n)-X(t_{n-1})$是相互独立的，则称$\{X(t),t\in T\}$为独立增量过程。

定义 2.3.15: 如果随机过程$\{X(t),t\in T\}$满足：

1） $X(0)=0$

2) $\{X(t),t\ge 0\}$具有独立增量性质

3）对任意$t>0$，有$X(t)\sim N(0,\sigma^2)$

则称$\left\{X(t),t\in T\right\}$为维纳(wiener)过程或布朗（Brown）运动，如果$\sigma=1$则称为标准维纳过程。

定义 2.3.16：一个$\mathbb{F}_n$适应的随机变量序列$\left\{X_n;n\geq 0\right\}$称为鞅，如果对$\forall n$，$X_n$可积，且$E(x_{n+1}\mid\mathbb{F}_n)=X_n \quad a.s.$

2.4 几种随机微积分

2.4.1 维纳积分

定义 2.4.1：设{W(t), t≥0}为标准布朗运动，b(t)是一个确定时间函数，在区间[0, t]，分点 $0=t_0<t_1<t_2<,...,<t_{n-1}<t_n=t$，定义

$$S_n=\sum_{k=0}^{n-1}b(t_k)[w(t_{k+1})-w(t_k)] \tag{2.4.1}$$

的均方极限为函数 b(t)的维纳积分，记作$\int_0^t b(s)dW(s)$，关于黎曼积分和维纳积分的关系，有以下定理

定理 2.4.1[37]：设b(t)是一个确定性时间函数，如果黎曼积分

$$\int_0^t |b(s)|^2 ds<\infty$$

则维纳积分$\int_0^t b(s)dW(s)$ 一定存在。

维纳积分的性质：

（1）线性性 当$\int_0^t |b_1(s)|^2 ds$，$\int_0^t |b_2(s)|^2 ds$ 均存在时

$$\int_0^t [a_1b_1(u)+a_2b_2(u)]dW(u)=a_1\int_0^t b_1(u)dW(u)+a_2\int_0^t b_2(u)dW(u) \tag{2.4.2}$$

其中a_1,a_2为常数，$b_1(t),b_2(t)$是一个确定性时间函数。

（2）可加性

$$\int_0^{t_1} b(u)dW(u)+\int_{t_1}^{t_2} b(u)dW(u)=\int_0^{t_2} b(u)dW(u) \qquad (2.4.3)$$

注：当$t\geq 0$, b(t)>0 时，并不能说明$\int_0^t b(t)dW(t)>0$。

在工程技术中经常遇到

$$\begin{cases} dx(t)=f(t,x(t))+g(t,x(t))\dot{W}(t) \\ x(t_0)=x_0 \end{cases} \qquad (2.4.4)$$

这类微分方程，其中$\dot{W}(t)$为白噪声，如果没有 g(t, x(t))$\dot{W}(t)$这一项，则上述微分方程就是普通的常微分方程，增加了这一项，则表示引入了随机因素，于是 x(t) 不再是普通的确定性函数，而是随机过程了。

将（2.4.4）写成微分形式

$$dx(t)=f(t,x(t))dt+g(t,x(t))dW(t) \qquad (2.4.5)$$

其中 $x(t_0)=x_0,t\in[t_0,T],f:[t_0,T]\times R^n\to R^n,g:[t_0,T]\times R^n\to R^{n\times m}$，且 f,g 均为 $[t_0, T]$上的 Borel 可测函数，$W(t)=(w_1(t),w_2(t),...,w_m(t))^T$，$E|x_0|^2<\infty$

对于该随机微分方程它的积分形式可写为

$$x(t)=x(t_0)+\int_{t_0}^t f(s,x(s))ds+\int_{t_0}^t g(s,x(s))dW(s) \qquad (2.4.6)$$

该式中的第一个积分定义为一般意义下的均方黎曼-司梯捷斯 (Riemann-Stieltjes)积分,然而将第二个积分同样定义为黎曼-司梯捷斯积分则无意义，这是因为，若定义随机变量

$$\Phi_n=\sum_{k=1}^n X(t_k')\left[W(t_k)-W(t_{(k-1)})\right] \qquad t_k'\in[t_{k-1},t_k] \qquad (2.4.7)$$

此随机变量序列并非均方收敛于唯一极限，其极限值依赖于t_k'的选取，所以积分在通常意义下的均方积分值不存在，导致这一结果的根本原因在于其方差随着时间的推移不断变大导致无界，而其期望值保持为零不变，或者说是因为$w(t)$的不可微性。

2.4.2 伊藤随机积分的定义

定义 2.4.2： 设W（t）为维纳过程，W(t)是一个二阶矩过程，在区间[a, b]上插入分点 $a = t_0 < t_1 < t_2 <,\ldots,< t_{n-1} < t_n = b$，定义

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X(t_{k-1})[W(t_k) - W(t_{k-1})] \qquad (2.4.8)$$

的均方极限为函数x(t)关于维纳过程W（t）的伊藤积分，记作

$$\int_a^b x(u)dW(u)$$

定理 2.4.2 [37]： 设 X(t)是一个均方连续的二阶矩过程，并且对任意的$s_1', s_2' \le t_{k-1} < t_k$及$s_1 < s_2 \le t_{k-1}$。 $[X(s_1'), X(s_2'), W(s_2) - W(s_1)]$与$W(t_k) - W(t_{k-1})$相互统计独立，则$X(t)$关于$W(t)$的伊藤积分存在且唯一。

伊藤积分的性质

1. 线性性　　设下列伊藤积分存在

$$\int_a^b x(t)dW(t), \qquad \int_a^b y(t)dW(t)$$

则对任意的常数α，β有

$$\int_a^b (\alpha x(t) + \beta y(t))dW(t) = a\int_a^b (x(t)dW(t) + \beta\int_a^b y(t)dW(t) \qquad (2.4.9)$$

2. 可加性　　如果$a \le b \le c$，则

$$\int_a^c x(t)dW(t) + \int_c^b x(t)dW(t) = \int_a^b x(t)dW(t) \qquad (2.4.10)$$

3. 设 $\int_a^b x(t)dW(t)$存在，则对于$a \le t \le c$，$y(t) = \int_a^t x(t)dW(t)$ 存在，

并且关 y(t) 关于 t 是均方连续的。

4. 设$\{X_n(t), t\in T=[a,b]\}$是均方连续的二阶矩过程，且满足伊藤积分存在的条件，$X_n(t), n=1,2,\ldots$是随机变量序列，如果关于$t\in T$一致地有

$$\lim_{n\to\infty} X_n(t)=X(t)$$

则 X(t) 也是均方连续地，X(t) 也满足伊藤积分的条件，并且对于$a\le t\le b$,一致地有

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^t x_n(t)dW(t) = \int_a^t x(t)dW(t) \qquad (2.4.11)$$

比较维纳积分和伊藤积分可知，如果在伊藤积分中 x(t) 为确定性函数，它就是维纳积分。

2.5 $It\hat{o}$ 型随机微分方程各种稳定性

设 $(\Omega,\mathbb{F},P)$ 是具有自然虑波 $\{\mathbb{F}_t\}_{t\ge0}$ 的完备概率空间，$W(t)=(w_1(t),\ldots,w_m(t))^T$ $(t\ge 0)$是一个 m 维的定义在此概率空间上的布朗(Brown)运动，且$R_+=[0,+\infty)$。

考虑 $It\hat{o}$ 型随机微分方程

$$\begin{cases} dx(t)=f(t,x(t))dt+g(t,x(t))dW(t) & t\ge 0 \\ x(t_0)=x_0 \end{cases} \qquad (2.5.1)$$

假设 $f\in[R_+\times R^n, R^n]$, $g\in[R_+\times R^n, R^{n\times m}]$都是 Borel 可测函数，$f,g$ 满足 Lipschtiz 条件和线性增长条件，且 $f(t,0)\equiv 0, g(t,0)\equiv 0 \quad t\ge t_0$，设 $c^{1,2}[R_+\times S_h, R_+]$ 表示定义在 $R_+\times S_h$ 上的非负函数 $V(t,x)$ 的全体，而 $S_h:\{x \mid \|x\|<h\}\subset R^n$，为 n 维空间包含原点的邻域，$V(t,x)$关于$(t,x)$分别有连

续的一阶导数和二阶导数。

根据$It\hat{o}$公式，现对于（2.5.1）定义一个微分算子

$$L\overset{def}{=}\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{j=1}^{n}f_i(t,x)\frac{\partial}{\partial x_i}+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\left[g(t,x)g^T(g,x)\right]\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j} \qquad (2.5.2)$$

如果L作用在$V(t,x)\in C^{1,2}[R_+\times S_h,R_+]$上，则有

$$LV(t,x)=\frac{\partial V(t,x)}{\partial t}+\frac{\partial V(t,x)}{\partial x}f(t,x)+\frac{1}{2}trace\left[g^T(t,x)\frac{\partial^2 V(t,x)}{\partial x\partial x}g(t,x)\right] \qquad (2.5.3)$$

这里$\frac{\partial V}{\partial_t}\overset{def}{==}\left(\frac{\partial V}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial V}{\partial x_n}\right)$,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial x}\underline{\underline{def}}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_i\partial x_j}\right)_{n\times n}\underline{\underline{def}}\begin{bmatrix}\frac{\partial^2 V}{\partial x_1\partial x_1},\ldots,\frac{\partial^2 V}{\partial x_1\partial x_n}\\ \vdots \qquad \vdots\\ \frac{\partial^2 V}{\partial x_n\partial x_1},\ldots,\frac{\partial^2 V}{\partial x_n\partial x_n}\end{bmatrix}_{n\times n} \qquad (2.5.4)$$

应用 It$\hat{o}$ 公式，若$x(t)\in s_h$，

则有 $$dV(t,x(t))=LV(t,x(t))dt+\frac{\partial V(t,x(t))}{\partial x}g(t,x(t))dW(t) \qquad (2.5.5)$$

定义 2.5.1 ： $\forall\varepsilon_1\in(0,1)$和$\forall\varepsilon_2>0,\exists\delta=\delta(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ t_0)$，使得当$\|x_0\|<\delta$时,有

$$p\{\|x(t,t_0,x_0)\|<\varepsilon_2,t\ge t_0\}\ge 1-\varepsilon_1$$

则称（2.5.1）式的零解是随机稳定的或是依概率稳定的。

定义 2.5.2: 若(2.5.1)式的零解是随机稳定的，且对$\forall\eta\in(0,1)$，$\exists\sigma_0=\sigma(\eta,t_0)>0$.使得当$\|x_0\|<\sigma_0$,有

$$p\{\lim_{t\to+\infty}x(t,t_0,x_0)=0\}\ge 1-\eta$$

则称（2.5.1）式的零解是随机渐近稳定的或依概率渐近稳定的。

定理 2.5.1: 若存在正定函数$V(t,x)\in C^{1,2}(R_+\times S_h,R_+)$,使得

$$LV(t,x) \le 0 \qquad \forall (t,x) \in R_+ \times S_h$$

则（2.5.1）式的零解是随机稳定的。

定理 2.5.2[38]:若存在正定的具有无穷小上界的函数

$v(t,x) \in C^{1,2}[[t_0,\infty) \times S_h, R_+]$, 使得$LV(t,x)$是负定，则（2.5.1）式的零解是随机渐近稳定的。

定义 2.5.3 称（2.5.1）式的零解是几乎必然指数稳定，若

$$\forall x_0 \in R^n, \text{有 } \lambda \overset{\text{def}}{=} \limsup_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \lg \|x(t,t_0,x_0\| < 0 \qquad a.s.$$

其中λ称为（2.5.1）式的解的 Lyapunov 指数。

定理 2.5.3[39]：假设存在函数$V(t,x) \in C^{1,2}[[t_0,\infty) \times R^n, R_+]$和$p > 0, c_1 > 0,$

$c_2 \in R, c_3 \ge 0$，使得对一切$x \ne 0$和$t \ge t_0$有

1） $c_1 \|x\|^p \le V(t,x)$ ，

2) $LV(t,x) \le c_2 V(t,x)$

3) $\left| \frac{\partial V(t,x)}{\partial x} g(t,x) \right|^2 \ge c_3 V^2(t,x)$

则 $\limsup_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \lg \|x(t,t_0,x_0)\| \le -\frac{c_3 - 2c_2}{2p} \qquad a.s.$ 对 $\forall x_0 \in R^n$

定义 2.5.4 ： 称（2.5.1）式的零解是均方指数稳定的，若存在正常数λ和

c使得（2.5.1）的解满足$E\left(\|x(t,t_0,x_0)\|^2\right) \le c\|x_0\|^2 e^{-\lambda(t-t_0)} \quad \forall x_0 \in R^n$

定理 2.5.4[40]：若存在函数$V(t,x) \in C^{1,2}[[t_0,+\infty) \times R^n, R_+]$及常数$c_1 > 0, c_2 > 0,$

$c_3 > 0$, 使得

$$c_1\|x\|^2 \le V(t,x) \le c_2\|x\|^2, \qquad LV(t,x) \le -c_3\|x\|^2$$

则
$$E\left(\|x(t,t_0,x_0)\|^2\right) \le \frac{c_2}{c_1}\|x_0\|^2 e^{-\frac{c_3}{c_2}(t-t_0)} \qquad t \ge t_0 \quad \forall x_0 \in R^n,$$

即（2.5.1）式的零解是均方指数稳定的。

2.6 具有变时滞的随机微分方程的稳定性

随机时滞微分方程及其稳定性已被广泛研究，特别是随机常时滞微分方程几乎必然指数稳定性的文章层出不穷。但变时滞随机微分方程的结果相对较少，且研究的方法主要用李雅普洛夫直接法，基于这种情况，本文利用局部鞅收敛定理和 $It\hat{o}$ 公式，研究具有可变时滞的随机微分方程的指数稳定性，得到了关于该系统与时滞无关的几乎必然指数稳定性的充分判据，推广了文献[41]和[42]的结果。

考虑具有可变时滞的随机微分方程

$$\begin{cases} dx(t)=g(x(t),x(t-\tau(t)),t)dt+\sigma(x(t),x(t-\tau(t)),t)dW(t) \\ x(s)=\xi(s) \quad s\in[-\bar{\tau},0] \end{cases} \tag{2.6.1}$$

其中 $x(t-\tau(t))=(x_1(t-\tau_1(t),x_2(t-\tau_2(t),...,x_n(t-\tau_n(t))$， $\tau_i(t)\in C(R_+,[0,\bar{\tau}])$, $i=1,\ ...,n$，$g:R^n\times R^n\times R_+\to R^n$, $C(R_+,[0,\bar{\tau}])$ 表示从 R_+ 映射到 $[0,\bar{\tau}]$ 的连续函数空间，$\sigma\ (x(t),x(t-\tau),t)dW(t)$ 表示随机扰动且 $W(t)=(w_1(t),...,w_m(t))^T$ 是定义在完备的概率空间 (Ω,F,P) 上的 m 维 $Brown$ 运动，$\sigma:R^n\times R^n\times R_+\to R^{n\times m}$ 是局部 Lipschitz 连续的且满足线性增长条件，设系统（2.6.1）有初始条件：

$$x(s)=\xi(s),\quad s\in[-\bar{\tau},0],\quad \xi\in L^2_{F_0}([-\bar{\tau},0],R^n)$$

$\xi\in L^2_{F_0}([-\bar{\tau},0],R^n)$ 表示具有 R^n 值的随机过程 $\xi\ (s)$ 在 $-\bar{\tau}\le s\le 0$ 是 F_0 可测，且 $\int_{-\bar{\tau}}^{0}\mathbf{E}\|\xi\ (s)\|^2\,ds<\infty$，（E 为数学期望）

假设 $V(x(t),t)\in C^{2,1}[R^n\times R_+;R_+]$， 定义系统（2.6.1）的 L 算子为：

$$\begin{aligned} \mathrm{L}V(x,y,t) &= V_t(x,t)+V_x(x,t)g(x,y,t) \\ &+\frac{1}{2}trace\ \ \sigma^T(x,y,t)V_{xx}(x,t)\sigma(x,y,t), \end{aligned} \tag{2.6.2}$$

其中 $V_t(x,t)=\dfrac{\partial V(x,t)}{\partial t},V_x(x,t)=\left(\dfrac{\partial V(x,t)}{\partial x_1},...,\dfrac{\partial V(x,t)}{\partial x_n}\right),V_{xx}(x,t)=\left(\dfrac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x_i\partial x_j}\right)_{n\times n}$，

$y=x(t-\tau)$。

定理 2.6.1[41]： 设A(t)和U(t)是t≥0上两个连续适应增长过程

且满足 A(0)=U(0)=0 a.s.。

又设M(t)是实值连续局部鞅且满足M(0)=0 a.s.。设 ζ 是一个非负F可测随机变量且满足Eζ<∞，令

$$X(t) = \zeta + A(t) - U(t) + M(t) \qquad t \geq 0$$

如果X(t)非负，则

$$\{\lim_{t\to\infty} A(t) < \infty\} \subset \{\lim_{t\to\infty} X(t) < \infty\} \cap \{\lim_{t\to\infty} U(t) < \infty\} \ a.s.$$

这里$E \subset D\ a.s.$的意义是$P(E \cap D^C) = 0$特别地，如果$\lim_{t\to\infty} A(t) < \infty\ a.s.$则对几乎所有的 ω∈Ω

$$\lim_{t\to\infty} X(t,\omega) < \infty \text{ 且 } \lim_{t\to\infty} U(t,\omega) < \infty$$

即X(t)和U(t)都收敛到有限随机变量。

定理 2.6.2: 假设存在下列函数$V \in C^{2,1}(R^n \times R_+; R_+)$，$\phi_i \in C(R;R_+), \varphi_i \in C(R;R_+)$及常数 $p_{ij} \geq 0, i \neq j, q_{ij} \geq 0, i, j = 1,2,...,n$ 对系统（2.6.1）满足:

(1) $LV_i \leq \sum_{j=1}^{n} [p_{ij}\phi_j(x_j) + q_{ij}\varphi_j(y_j)], i = 1,2,...,n$ （2.6.3）

(2) $V_i \leq \phi_i(x_i)$ i=1, ⋯, n （2.6.4）

(3) $\varphi_i(x_i) \leq \phi_i(x_i), \quad i = 1,...,n$ （2.6.5）

令 $P=(p_{ij})_{n\times n}, Q = (q_{ij})_{n\times n}$，若－（P+Q）为 M 矩阵，则对任意初始值 $\xi(s) \in L^2_{F_0}([-\bar{\tau},0],R^n)$，存在常数 r>0 使得系统（2.6.1）的解满足

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\lg(V(x(t;\xi),t))}{t} \leq -r\ a.s.$$

证明：对任意给定的初值 $\xi(s) \in L^2_{F_0}([-\bar{\tau},0],R^n)$，简记$x(t;\xi) = x(t)$，因为 －（P+Q）为M矩阵，所以存在$d_i$>0，使得

$$\sum_{i=1}^{n} d_i(p_{ij} + q_{ij}) < 0, j = 1,2,...,n$$

进而也存在充分小的γ使得

$$\sum_{i=1}^{n} [\delta_{ij} r + d_i d_j^{-1}(p_{ij} + e^{r\bar{\tau}} q_{ij})] < 0, j = 1,2,...,n., \quad \text{其中 } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \qquad (2.6.6)$$

令 $V=\sum_{i=1}^{n} d_i V_i$， 则有 $LV=\sum_{i=1}^{n} d_i(LV_i)$。

于是我们定义 $U(x,t)=e^{rt}V(x,t)$, 其中 $(x,t)\in R^n\times R_+$，显然有

$U\in C^{2,1}(R^n\times R_+;R_+)$，并可以得出

$$\mathrm{L}U(x,y,t)=re^{rt}V(x,t)+e^{rt}V_t(x,t)$$
$$+e^{rt}V_x(x,t)g(x,y,t)+\frac{1}{2}e^{rt}trace[\sigma^T(x,y,t)V_{xx}\sigma(x,y,t)]$$
$$=e^{rt}[rV(x,t)+\mathrm{L}V(x,y,t)]$$
$$=e^{rt}[r\sum_{i=1}^{n} d_i V_i+\sum_{i=1}^{n} d_i(LV_i)]$$

利用条件(2.6.3)、(2.6.4)、（2.6.5），

$$\mathrm{L}U(x,y,t)\le e^{rt}[\sum_{i=1}^{n} rd_i\phi_i(x_i)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_i p_{ij}\phi_j(x_j)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_i q_{ij}\varphi_j(y_j)]$$

由 $It\hat{o}$ 公式可得，对任意 t≥0

$$e^{rt}V(x,t)=V(x(0),0)+\int_0^t \mathrm{L}U(x(s),x_\tau(s),s)ds$$
$$+\int_0^t e^{rs}V_x(x(s),s)\sigma(x(s),x_\tau(s),s)dW(s)$$
$$\le V(\xi(0),0)+\sum_{i=1}^{n} rd_i\int_0^t e^{rs}\phi_i(x_i(s))ds+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_i p_{ij}\int_0^t e^{rs}\phi_j(x_j(s))ds$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_i q_{ij}\int_0^t e^{rs}\varphi_j(x_j(s-\tau_j))ds$$

$$+\int_0^t e^{rs}V_x(x(s),s)\ \sigma(x(s),x_\tau(s),s)dW(s) \tag{2.6.7}$$

另一方面 $\int_{t-\tau_j}^{t} e^{rs}\varphi_j(x_j(s))ds=\int_{-\tau_j}^{t} e^{rs}\varphi_j(x_j(s)ds-\int_0^t e^{r(s-\tau_j)}\varphi_j(x_j(s-\tau_j))ds$

$$\le\int_{-\bar{\tau}}^{t} e^{rs}\varphi_j(x_j(s))ds-e^{-r\bar{\tau}}\int_0^t e^{rs}\varphi_j(x_j(s-\tau_j))ds$$

所以有$\int_0^t e^{rs}\varphi_j(x_j(s-\tau_j))ds\le e^{r\bar{\tau}}\int_{-\bar{\tau}}^{t} e^{rs}\varphi_j(x_j(s))ds-e^{r\bar{\tau}}\int_{t-\tau_j}^{t} e^{rs}\varphi_j(x_j(s))ds$

$$=e^{r\bar{\tau}}[\int_{-\bar{\tau}}^{0} e^{rs}\varphi_j(x_j(s))ds+\int_0^t e^{rs}\varphi_j(x_j(s))ds]-e^{r\bar{\tau}}\int_{t-\tau_j}^{t} e^{rs}\varphi_j(x_j(s))ds \tag{2.6.8}$$

由（2.6.7）、（2.6.8）得

$$e^{rt}V(x,t)\le V(\xi(0),0)+\sum_{i=1}^{n}d_i[r\int_0^t e^{rs}\phi_i(x_i(s))ds+(\sum_{j=1}^{n}p_{ij}+e^{r\bar\tau}\sum_{j=1}^{n}q_{ij})\int_0^t e^{rs}\phi_j(x_j(s))ds]$$
$$+e^{r\bar\tau}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}d_iq_{ij}\int_{-\bar\tau}^{0}e^{rs}\varphi_j(x_j(s))ds-e^{r\bar\tau}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}d_iq_{ij}\int_{t-\tau_j}^{t}e^{rs}\varphi_j(x_j(s))ds$$
$$+\int_0^t e^{rs}V_x(x(s),s)\ \sigma(x(s),x_\tau(s),s)dW(s)$$

利用（2.6.6），可得

$$\sum_{i=1}^{n}d_i[r\int_0^t e^{rs}\phi_i(x_i(s))ds+(\sum_{j=1}^{n}p_{ij}+e^{r\bar\tau}\sum_{j=1}^{n}q_{ij})\int_0^t e^{rs}\phi_j(x_j(s))ds]$$
$$=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}[\delta_{ij}r+d_id_j^{-1}(p_{ij}+e^{r\bar\tau}q_{ij})]d_j\int_0^t e^{rs}\phi_j(x_j(s))ds<0\text{。}$$

所以有

$$e^{rt}V(x,t)+e^{r\bar\tau}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}d_iq_{ij}\int_{t-\tau_j}^{t}e^{rs}\varphi_j(x_j(s))ds\le X(t),\qquad (2.6.9)$$

其中 $$X(t):=V(\xi(0),0)+e^{r\bar\tau}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}d_iq_{ij}\int_{-\bar\tau}^{0}e^{rs}\varphi_j(x_j(s))ds$$
$$+\int_0^t e^{rs}V_x(x(s),s)\,\sigma(x(s),x_\tau(s),s)dW(s)$$

是一个非负鞅。由引理得

$$\lim_{t\to\infty}X(t,\omega)<\infty\quad a.s.$$

由（2.6.9）可得出：
$$\lim_{t\to\infty}\sup\ e^{rt}V(x,t)<\infty\qquad a.s.$$

所以有
$$\lim_{t\to\infty}\sup\frac{\log(V(x(t;\xi),t))}{t}\le-\gamma\quad a.s.$$

定理证毕。

注：在定理 2.6.2 中取矩阵—（P+Q）$=\lambda E$(E为单位矩阵)或—（P+Q）$=diag\{\lambda_i-\mu_i\}>0$，则可分别获得文献[41]与[42]的相关结果。

第三章　　随机神经网络的指数稳定性

3.1　随机神经网络的发展背景

神经网络是一种特殊结构的动力系统，它已成功的运用到很多领域。如：生物学、医学、电子学、物理、化学、计算机科学、控制科学、材料科学等。其成功应用的例证涵盖了智能控制系统、信号处理、模式识别、智能计算等方面。然而，随着科学技术发展的日新月异，对系统有较高的要求或随机因素不可忽略时，利用随机系统来处理问题，成为自然而必要的手段。例如：比较简单的电路系统可以忽略噪声的影响，但对于大规模的集成电路来说，避免随机噪声的影响是不可取的，它会增大误差，影响系统的稳定性能，而利用随机数学模型处理问题时，情况就要好得多。

随机神经网络（Random Neural Network ,简称 RNN）是仿照生物神经网络的这种机理进行设计和应用的。它一般分成两类，一类是采用随机神经网络元的激活函数;另一类是采用随机型加权连接,即在普通人工神经网络中加入适当的随机噪声。第一种主要是指由美国佛罗里达大学(UCF)教授 Eorl Gelenbe 于 1989 年提出的一种随机神经网络,也是人们公认的 Gelenbe 随机神经网络(GNN)。1991 年 Gelenbe 等人提出了一种前向型二值随机神经网络(Biopolr Random Neural Network,简称 BRNN)模型。BRNN 是由一对互补的标准的 GNN 构成,这对互补的 GNN 神经元节点的作用刚好相反;正神经元的运行机制同 GNN 的初始定义相同,负神经元的运行机制与 GNN 初始定义对称相反.当负信号来到时,可以增加这个神经元的势，正信号来的时候则抵消负信号的作用.现已证明 BRNN 可以作为连续函数的广义函数的逼近器。

1994 年,Gelenbe 等人又提出了动态随机神经网络(Dynamical Neural Network,简称 DRNN),它是建立在 GNN 的基础上,通过设定初始值以及增加一个 Cohen—Gossberg 型动态方程作为负反馈回路来提高网络性能解决问题的。DRNN和GNN的主要区别在于:GNN外界信号的输入在初始变化以后就保持恒定不变,是一个开环系统,而 DRNN 是一个闭环负反馈系统。DRNN 已被成功的应用于

解最优化的标志性问题—旅行商问题(TSP)上。

1999 年,Gelenbe 等人再次提出多类别随机神经网络(Muiltiple Class, Random Neural Networks,简称 MCRNNS)。这个网络是 GNN 网络模型的一种合成,是为了建立一个神经网络的数学构架来同时处理不同种类的信息。不同的信号代表复合网络中的不同类别,可以表示声音处理网络中的不同频率,图像处理网络中的不同颜色,或者多传感器信号中不同传感器的信号输入。

3.2 随机神经网络稳定性研究的发展概况

$It\hat{o}$ 系统的稳定性理论的兴起,主要是受到了 Kac. I. Ja 和 Krasovskill 的工作的激励,其后 Hasminskill 对他们的工作做了多方面的推广。近期华中科技大学的廖晓昕教授和英国大学 Strathclyde 统计与建模科学的毛学荣教授在 $It\hat{o}$ 型时滞系统的稳定性方面作了很多很好的工作。特别是上世纪 90 年代，他们在国际上率先研究了随机神经网络和随机时滞神经网络的稳定性。

1995 年 6 月[43]廖晓昕和毛学荣首次考虑了随机神经网络

$$\begin{cases} dx(t) = (-Bx(t) + Ag(x(t)))dt + \sigma(x(t))dW(t), \quad t \ge 0 \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{3.2.1}$$

这里 $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T$， $A = (a_{ij})_{n\times n}$，$B = diag(b_1, b_2, \dots, b_n)$ 且函数 $g_i(x)$ 满足 $\forall x \in R$, $xg_i(x) \ge 0$,且 $|g_i(x)| \le 1\Lambda\beta_i(u)$。$W(t) = (w_1(t), w_2(t), \dots, w_m(t))^T$ 是定义在具有自然滤波 $\{\mathbb{F}\}_{t\ge 0}$ 的完备空间$(\Omega, \mathbb{F}, P)$ 上的 m 维布朗运动，$\sigma(x) = (\sigma_{ij}(x))_{n\times m}$ 是局部Lipschtiz 连续的且满足线性增长条件，$\sigma(0) = 0$。作者得到了该（3.2.1）的几乎必然指数稳定性和几乎指数不稳定的充分条件。

1997 年 6 月，[44]廖和毛考虑了具有时滞 Hopfield 神经网络

$$\begin{cases} dx(t) = (-Bx(t) + Ag(x_\tau(t)))dt + \sigma(x(t), x_\tau(t))dW(t) \\ x(s) = \xi(s) \qquad (-\tau \le s \le 0) \qquad \tau \ge 0 \end{cases} \tag{3.2.2}$$

其中，$x_\tau(t) = (x_1(t-\tau_1), x_2(t-\tau_2), \dots, x_n(t-\tau_n))^T$, $g(x) = (g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x))^T$，$|g_i(\xi)| \le 1\Lambda\beta_i|\xi|$, $\xi \in (-\infty, +\infty)$, $g_i(\xi)$ 是 S 型函数，得到了系统均方指数稳定性的充分条件。

1999 年付莉红[45]等人利用 Lyapunov 泛函鞅不等式和 Borel—Cantelli

引理研究了如下不确定随机时滞网络模型，建立了均方指数稳定与几乎必然指数稳定的充分判据。

$$\begin{aligned} dx(t) = [-(A+\Delta A(t))x(t) + (B+\Delta B(t-\tau))\sigma(x(t-\tau))dt \\ + f(t,x(t),x(t-\tau))dW(t) \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

2000 年，沈轶[46]等人利用 Razumikhin 定理与 Lyapunov 函数，建立了具有可变时滞的 Hopfield 随机神经网络均方指数稳定性与几乎必然指数稳定性的两类判据，一类是时滞相关，而另一类是时滞无关。研究的系统如下：

$$dx(t) = [-Ax(t) + B\sigma x(t-\delta_1(t))]dt + f(t,x(t),x(t-\delta_2(t)))dW(t) \tag{3.2.4}$$

其中$\delta_i(t) \in C(R_+,[0,\tau]), i=1,2,\quad \tau$是时滞且$\tau > 0$。

2005 年 10 月，赵碧蓉[47]等人应用 Lyapunov 第二方法对一类随机时滞神经网络系统的全局指数稳定性进行了分析，得到了易于判定随机时滞神经网络几乎必然指数稳定性新的代数判据。具体系统如下：

$$\begin{aligned} dx_i = (-c_i x_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} h_j(x_j(t-\tau))dt \\ + g_i(t,x_i(t),x_i(t-\tau))dW(t) \qquad i=1,2,\ldots,n \end{aligned} \tag{3.2.5}$$

其中神经元的激活函数z_j，h_j及随机干扰强度函数g_j满足下列条件：

$\forall\ x_1,x_2 \in R,\qquad \exists k_j,l_j > 0$ 使 得：

(1) $0 \le \dfrac{z_j(x_1)-z_j(x_2)}{x_1-x_2} \le k_j \qquad 0 \le \dfrac{h_j(x_1)-h_j(x_2)}{x_1-x_2} \le l_j \qquad j=1,2,\ldots,n$

(2) $\forall\ (t,x,y) \in R_+ \times R^n \times R^n, \qquad \exists m_i,n_i > 0, \qquad i=1,2,\ldots,n,$ 使得

$$trace[g_i^T(t,x,y)g_i(t,x,y)] \le m_i |x_i|^2 + n_i |y_i|^2$$

2005年10月文武，杨汉生[48]等人借助于李雅谱洛夫理论、矩阵分析方法和Itô公式，结合不等式分析技巧研究了随机型细胞神经网络的指数稳定性，给出了系统的解的二阶矩Lyapunov指数估计式和均方指数稳定的充分条件。系统如下：

$$\begin{aligned} C_i dx_i(t) = [-\frac{1}{R_i}x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} T_{ij}(f_j(x_j(t))) + I_i]dt + \\ \sum_{j=1}^{n} g_{ij}(t,x(t)dw_j(t) \qquad i=1,2,\ldots,n \end{aligned} \tag{3.2.6}$$

其中 $f_j(x_j(t))$（j=1, 2, …, n）为第j 单元的饱和线性输出函数，并且满足：

$$f_j(u)=\frac{1}{2}(|u+1|-|u-1|) \qquad (j=1,2,\dots,n)$$

2005 年 12 月牛健人[49]等用随机积分的 *Itô* 公式，时滞微分不等式及随机时滞神经网络的特性讨论变时滞 Cohen-Grossberg 随机神经网络

$$\begin{cases} dx(t)=Ax(t)[-Bx(t)+WG(x_\tau(t))]dt \\ \qquad\qquad +\sigma(x(t),x_\tau(t),t)dW(t), & t\ge t_0 \\ x(t)=\phi(t), & t_0-\tau\le t\le t_0 \end{cases} \tag{3.2.7}$$

得到了系统的均方指数稳定性。

2005年，沈轶，江明辉，姚宏善[50]研究了具有可变时滞的随机细胞神经网络的指数稳定性，应用Razumikhin 定理与Lyapunov 函数，建立了这种细胞神经网络均方指数稳定与几乎必然指数稳定的两类判据，一类是时滞无关而另一类是时滞相关。具体系统如下：

$$\begin{aligned} dx(t)=[-Dx(t)+A\sigma(x(t))+B(\sigma(t-\delta_1(t)))]dt+ \\ f(t,x(t),x(t-\delta_2(t)))dW(t) \end{aligned} \tag{3.2.8}$$

2006年江明辉，沈轶，廖晓听[51]通过构建李雅普洛夫函数的方法和利用半鞅收敛定理对一类随机时滞神经网络的全局指数稳定进行了分析，提出了易于判定随机时滞神经网络几乎必然指数稳定性新的代数判据。多时滞随机神经网络系统如下：

$$dx(t)=[-Dx(t)+Ag(x_\tau(t))]dt+\sigma(t,x_\tau(t))dW(t) \tag{3.2.9}$$

3.3 随机神经网络的指数稳定性条件

自 1982 年美国生物物理学家 Hopfield 提出了具有广泛应用的 Hopfield 型人工神经网络之后，人们对 Hopfield 型神经网络的稳定性进行了广泛而深入的研究，而实际应用中，随机干扰是不可避免的。经过众多学者的努力，随机神经网络的指数稳定性，具有常数时滞的 Hopfield 型随机神经网络的与时滞无关的均方指数稳定性以及与时滞相关的均方指数稳定性和几乎必然指数稳定性的判据得到了充分的发展，至于可变时滞的 Hopfield 型随机神经网络的指数稳定性却很少有人研究。基于这种状况，本人建立具有可变时滞的 Hopfield 型随机神经网络的指数稳定性的充分判据。

考虑具有可变时滞的 Hopfield 型随机神经网络。

$$dx(t)=(-Ax(t)+Bf(x(t))+Cg(x(t-\tau(t)))dt+\sigma(x(t),x(t-\tau(t),t)dW(t)$$
$$x(s)=\xi(s) \qquad s\in[-\bar{\tau},0] \qquad (3.3.1)$$

其中 $x(t-\tau(t))=(x_1(t-\tau_1(t),x_2(t-\tau_2(t),...,x_n(t-\tau_n(t))$，$\tau_i(t)\in C(R_+,[0,\bar{\tau}])$，$i=1,\ ...,n$，$A=diag(a_1,a_2,...,a_n),a_i>0,\quad \mathrm{B}=(b_{ij})_{n\times n},C=(c_{ij})_{n\times n}$，$f(x)=(f_1(x_1),...,f_n(x_n))^T$，$g(y)=(g_1(y_1),g_2(y_2),...,g_n(y_n))^T$，$C(R_+，[0,\bar{\tau}])$ 表示从R_+映射到$[0,\bar{\tau}]$ 的连续函数空间，表 示 随 机 扰 动 且 $W(t)=(w_1(t),...,w_m(t))^T$ 是定义在完备的概率空间 $(\Omega,\mathbb{F},P)$ 上的 m 维 $Brown$运动,$\sigma:R^n\times R^n\times R_+\to R^{n\times m}$是局部 Lipschitz 连续的且满足线性增长条件，设系统（3.3.1）有初始条件：

$$x(s)=\xi(s),\quad s\in[-\bar{\tau},0],\quad \xi\in L^2{}_{F_0}([-\bar{\tau},0],R^n)$$

$\xi\in L^2{}_{\mathbb{F}_0}([-\bar{\tau},0],R^n)$表示具有$R^n$值的随机过程，$\xi(s)$在$-\bar{\tau}\le s\le 0$是$\mathbb{F}_0$可测，且 $\int_{-\bar{\tau}}^0 \mathbf{E}\|\xi(s)\|^2ds<\infty$，（E 为数学期望），假设$V(x(t),t)\in C^{2,1}[R^n\times R_+;R_+]$

其中，$y=x(t-\tau)$，将系统（3.3.1）改写成

$$dx_i(t)=[-a_ix_i(t)+\sum_{j=1}^n b_{ij}f_j(x_j)+\sum_{j=1}^n c_{ij}g_j(y_j)]dt+\sum_{j=1}^m\sigma_{ij}(x,y,t)dw_j(t) \qquad (3.3.2)$$
$$x_i(s)=\xi_i(s) \qquad s\in[-\bar{\tau},0],\ i=1,2,...,n$$

定理 3.3.1 假设上述系统（3.3.2）满足以下条件

(1) $|f_j(x_j)|\le M_j^{(1)}|x_j|,\qquad |g_j(y_j)|\le M_j^{(2)}|y_j| \qquad j=1,2,\cdots,n$ (3.3.3)

(2) $|\sigma_{ij}(x,y,t)|^2\le l_ix_i^2+h_iy_i^2 \quad i=1,2,\cdots,n$ (3.3.4)

(3) －（P+Q）为 M 矩阵 (3.3.5)

其中$M_j^{(1)}$，$M_j^{(2)}$，l_i，h_i为非负常数，$t_{ir}=|b_{ir}|M_r^{(1)}+|c_{ir}|M_r^{(2)}$

$$p_{ij}=(-2a_j+ml_j+\sum_{r=1}^n t_{jr})\delta_{ij}+|b_{ij}|M_j^{(1)},$$
$$q_{ij}=|c_{ij}|M_j^{(2)}+m\delta_{ij}h_j \qquad i,\ j,\ r=1,2,...,n$$

则该随机神经网络系统(3.3.1)的零解几乎必然指数稳定。

证明： 令 $V_i=x_i^2$,

则 $LV_i = 2x_i[-a_i x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} f_j(x_j) + \sum_{j=1}^{n} c_{ij} g_j(y_j)] + \sum_{j=1}^{m} \sigma_{ij}{}^2(x,y,t)$

由（3.3.3），（3.3.4）得

$$LV_i \le -2a_i x_i{}^2 + 2\sum_{j=1}^{n} |b_{ij}| M_j^{(1)} |x_i||x_j| + 2\sum_{j=1}^{n} |c_{ij}| M_j^{(2)} |x_i||y_j| + ml_i x_i^2 + mh_i y_i^2$$

运用 $ab \le \frac{a^2+b^2}{2}$， 其中 $a,b \in R^+$， 所以

$$LV_i \le (-2a_i + ml_i) x_i^2 + \sum_{j=1}^{n} |b_{ij}| M_j^{(1)} (x_i{}^2 + x_j^2) + \sum_{j=1}^{n} |c_{ij}| M_j^{(2)} (x_i{}^2 + y_j^2) + mh_i y_i^2$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-2a_j + ml_j)\delta_{ij} x_j^2 + \sum_{j=1}^{n} (|b_{ij}| M_j^{(1)} + |c_{ij}| M_j^{(2)}) x_i^2 + \sum_{j=1}^{n} |b_{ij}| M_j^{(1)} x_j^2 + \sum_{j=1}^{n} |c_{ij}| M_j^{(2)} y_j^2 + \sum_{j=1}^{n} m\delta_{ij} h_j y_j^2,$$

其中 $\delta_{ij} = \{ \begin{smallmatrix} 1 & i=j \\ 0 & i\ne j \end{smallmatrix}$

$$= \sum_{j=1}^{n} [(-2a_j + ml_j)\delta_{ij} + |b_{ij}| M_j^{(1)}] x_j^2 + \sum_{r=1}^{n} t_{ir} x_i^2 + \sum_{j=1}^{n} [|c_{ij}| M_j^2 + m\delta_{ij} h_j] y_j^2$$

$$= \sum_{j=1}^{n} [(-2a_j + ml_j)\delta_{ij} + |b_{ij}| M_j^{(1)}] x_j^2 + \sum_{j=1}^{n} [|c_{ij}| M_j^2 + m\delta_{ij} h_j] y_j^2 + \sum_{j=1}^{n}\sum_{r=1}^{n} t_{jr} \delta_{ij} x_j^2$$

$$= \sum_{j=1}^{n} [(-2a_j + ml_j + \sum_{r=1}^{n} t_{jr})\delta_{ij} + |b_{ij}| M_j^{(1)}] x_j^2 + \sum_{j=1}^{n} [|c_{ij}| M_j^{(2)} + m\delta_{ij} h_j] y_j^2$$

令 $\phi_j(x_j) = x_j^2$， $\varphi_j(y_j) = y_j^2$

则 （1）$\mathrm{LV}_i \le \sum_{j=1}^{n} [p_{ij}\phi_j(x_j) + q_{ij}\varphi_j(y_j)]$， $i = 1,2,\ldots,n$

(2) $V_i \le \phi_i(x_i)$ $i = 1,2,\ldots,n$

(3) $\varphi_i(x_i) \le \phi_i(x_i)$， $i = 1,2,\ldots,n$

由（3.3.5）及定理 2.6.2 的结果，该定理成立。

参考文献

[1] J.W.Gibbs, Elementary principles in statistical mechanics, New Haven, Yale Univ.Press, 1902.

[2] P.Langevin, Sur 1a theore du movement Brownien, C.R.AcadSci. Paris., 1908, 146, 530-533.

[3] S.Bernstein, Principles de la theorie des equations differentiales stochastiques, Trudy Fiz-Mat. Stekrov Inst. Acad. Nauk, 5(1934), 95-124.

[4] S.Bernstein, Equations differentiales stochastiques, Act.Sci.et Ind., 738, Conf. intern. Sci Math. Univ.Geneve, 5-31, Herman, Paris, 1938

[5] I.I.Gihman, A method of constructing random processes, Dokl.Akad.Nauk SSSR. 58(1947), 961-964.

[6] I.I.Gihman, Certain differential equations with random functions, Ukr.Mat.Zh., 2(1950), NO.3, 45- 69.

[7] I.I.Gihman, On the theory of differential equations of random processos, Ukr.Mat.Zh，2（1950）, NO.4, 37-63

[8] K.Ito, Differential equations determining Markov processes,Zenkoku Shijio Sugaku Danwakai, 244(1942), NO.1077, 1352-1400.

[9] K.Ito, On Stochastic differential equations, Mem.Amer.Math.Soc., NO.4, 1951.

[10] L.E.Bertain, P.E.Sarachik, stability of Circuits with randomly time-varying parameters, IRE.Circuit Theory, CT -6,Special supplement ,260-270,1959.

[11] L.Arnold, Stochastic Differential Equations. Theory and Applications, Jonh Wiley Sons,1972.

[12] L.Arnold,Random Dynamical Systems, Spruger-Verlag,1998.

[13] K.D,Elwcrthy，Stochastic Differential Equations On Manifolds, Cambridge University. Press,1982

[14] A.Freidlin& A.D.Wentzell, Random Perturbations of Dynamical Systems, 2nd Edition, Springer- Verlag, 1948.

[15] E.Beretta , Y.Kuang, Convergence results in a well known delayed predator-prey system

[16] R.F.Curtain, F.L.Falb, Stochastic Differential Equations in Hilbert Space, J. Dif. Equ-, 10, 412-430, 1971.

[17] F.Kozin, Stability of the linear stochastic system, Lecture Notes in Mathematics, Vol.294, Springer-Verlag, New York, 1972

[18] U.G..Haussmann, Asymptotic Stability of the Linear Ito Equation in Infinite Dimensions, J. Math. Anal. Appl., 65,219-235,1970.

[19] A. Ichikawa, Optimal Control of a Linear Stochastic Evolution Equation with State and Control Dependent Noise Technical Report NO.43, University of Warwick Control 丁 Theory Centre.

[20] T. C. Gard. Introduction to Stochastic Differential Equations. marcel Dekker, New York, 1988: 157-181

[21] S.E.A.Mohammed. Stochastic Functional Differential Equation.Advanced Publishing Program, Boston,1984.

[22] S.E.A.Mohammed. The Lyapunov Spectrum and Stable Manifolds for Stochastic Linear Delay Equations Stochastic and Stochastic Reports,1990,29:89-131.

[23] X.Mao, Exponential Stability of Stochastic Differential Equations, .Marcel Dekker,Inc, New York/Basel/Hong Kong, 1994.

[24] X.Mao, Razumikhin-Type Theorem on Exponential Stability of Neutral Stochastic Functional Differential Equations, SIAM J.Math. Anal. VOL.28, N0.2, 389-401, 1997.

[25] T.Taniguchi. K.Liu, A.Truman, Existence, Uniqueness, and Asymptotic Behavior of Mild Solutions to Stochastic Functional Differential Equations in Hilbert Spaces, Journal of Differential Equations, 181(2002),72-91.

[26] T.Caraballo, K.Liu, A.Truman, Stochastic functional partial differential equations: existence, uniqueness and asymptotic decay property, Proc. R. Soc. Lond, A, 456, 1775-1802, 2000.

[27] X.Mao, Stochastic. Version of the LaSalle Theorem, J. Dif. Equ., 153, 175-195,1999.

[28] X.Mao, Stochastic LaSalle-Type Theorem for Delay Equations,

[29] X.Mao. N.Koroleva, A.Rodkina, Robust stability of uncertain stochastic differential delay equation, System & Control Letters, 35(1998) 325-336.

[30] V.Dragan, T.Morozan, Exponential stability for a class of singularly perturbed Ito differential equations, EJQTDE, Proc. 6th Coll. QTDF, 2000, NO.7, 1-13.

[31] 罗交晚，邹捷中，侯振挺，比较原理与 Markov 调制的随机时滞系统的稳定性，中国科学 .（A 辑），第 33 卷,第 1 期，62-70，2003.

[32] Hahan. W.， Stability of Motion, Springer-Verlag Bearlin-New York, 1967.

[33] Yoshizzawa T.， Stability theory by Lyapunov`s second Methods. The Math, Soc. of Japan. Takyo, 1996.

[34] Michel A.N. 大型动态系统的定性分析，郑应平译，沈阳：辽宁科学技术出版社，1985

[35] 廖晓析，稳定性数学理论和应用（修订本），武汉：华中科技大学出版社，1999

[36] 秦元勋，王联，王慕秋，运动稳定性理论与应用，北京科学出版社，1981

[37] 陆大金，随机过程及其应用，清华大学出版社，北京，1986 年

[40] Mao Xuerong, Exponential stability of stochastic differential equations. New York. Marcel Dekker In C, 1994.

[38] Mao Xuerong, Differential Equations and Applications. Horwood publishing, 1997.

[39] Friedman A. Stochastic Differential Equations and Applications New York. Academic Press, 1976.

[41] Steve Blythe, Xuerong Mao, Xiaoxin Liao, Stability of stochastic delay neural networks, Journal of the Franklin Institute 338(2001)481-495.

[42] 张子方，不确定动力系统的稳定性及其应用，博士学位论文，2004，P.76

[43] 廖晓昕，毛学荣，随机神经网络的稳定性，华中师范大学学报（自学科学版），1995 年，29（2）

[44] 廖晓昕，毛学荣，随机时滞 Hopfield 神经网络的均方指数稳定性，华中理工大学学报，1997 年，25（6）

[45] 付莉红，万均力，沈轶，随机时滞神经网络的指数稳定性，湖北三峡学院学报，1999 年，21（5）

[46] 沈轶，赵勇，廖晓昕，杨叔子，具有可变时滞的 Hopfield 随机时滞神经网络的指数稳定性，数学物理学报，2000，20（3）400-404

[47] 赵碧蓉，江明辉，沈轶，随机时滞神经网络的全局指数稳定性，控制理论与运用，2005 年 10 月，22（5）

[48] 文武，杨汉生等，随机型细胞神经网络的稳定性，电子科技大学学报，34（5），2005

[49] 牛健人，张子方，徐道义，变时滞 Cohen-Grossberg 随机神经网络的均方指数稳定

性，工程数学学报，22（6），2005.

[50] 沈轶,江明辉，姚宏普,细胞神经网络的指数稳定性，数学物理学报，25A(2),2005

[51] 江明辉，沈轶，廖晓昕，多时滞随机神经网络的稳定性，应用数学， 19（1），2006

声　明

本人声明所提交的学位论文是本人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。据我所知，除了文中特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含其他人已经发表或撰写的研究成果，也不包含为或得四川大学或其他教育机构的学位或证书而使用过的材料。与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中做了明确的说明并表示谢意。

本学位论文成果是本人在四川大学读书期间在导师指导下取得的，论文成果归四川大学所有，特此声明。

作者签名：　　　　导师签名：

日　　期：2006.4.28　　　　日　　期：2006.4.28

致 谢

本文是在导师徐道义教授悉心指导下完成的，论文的所有章节都凝聚了导师的心血和汗水。导师渊博的知识、严谨的治学态度、求实的工作作风、勇于探索的精神以及对科学孜孜不倦的追求，使我受益终生。徐老师敏锐的洞察力、严谨的治学作风和认真求实的科学态度使我在三年的学习过程中受益匪浅，并且将对我未来的工作和学习起指导作用。值此论文完成之际，本人谨对徐老师多年来在学术上的谆谆教导和生活上无微不至的关怀致以最诚挚的谢意!

感谢杨志春，曾永福，杨志国，黄玉梅，朱伟，龙述君，李兵，向丽等各位学友的关心和帮助。

同样感谢四川大学数学学院的其他老师对我的指导和帮助。

Ito型随机微分方程的指数稳定性及其应用

作者： 刘宗树

学位授予单位： 四川大学

本文读者也读过(10条)

1. 胡进 一类随机微分方程的稳定性分析[学位论文]2005
2. 徐侃.姜国.XU Kan.JIANG Guo 一类Volterra型随机微分方程解的指数p-稳定性[期刊论文]-湖北师范学院学报（自然科学版）2006,26(4)
3. 罗日才.许弘雷.LUO Ri-cai.XU Hong-lei 随机变时滞神经网络的全局渐近稳定性[期刊论文]-通信技术2009,42(6)
4. 卢俊香.段献葆.付蓉.LU Jun-xiang.DUAN Xian-bao.FU Rong 带脉冲的随机Hopfield 型神经网络的p 阶矩稳定性[期刊论文]-工程数学学报2010,27(4)
5. 孟立平.MENG Li-ping 微分方程的零解稳定性在控制理论中的应用[期刊论文]-佳木斯大学学报（自然科学版）2010,28(1)
6. 刘早清.陆云霞.LIU Zao-qing.LU Yun-xia 一类随机微分方程的稳定性[期刊论文]-应用数学2006,19(4)
7. 朱德馨 随机种群发展方程解的稳定性和吸引性[学位论文]2009
8. 宋永利 泛函微分方程的分支理论及应用[学位论文]2005
9. 彭国强.黄立宏.PENG Guo-qiang.HUANG Li-hong 一类随机微分方程指数稳定性的判别[期刊论文]-湖南大学学报（自然科学版）2007,34(5)
10. 孙永辉 随机神经网络的稳定性及混沌同步[学位论文]2006

本文链接：http://d.g.wanfangdata.com.cn/Thesis_Y995056.aspx